Sensorveiledning – nasjonal deleksamen 5-10, 02.12.2019

Karakterer settes etter følgende karakterskala basert på poengsum:
A: 27-29

B: 23-26

C: 18-22

D: 14-17

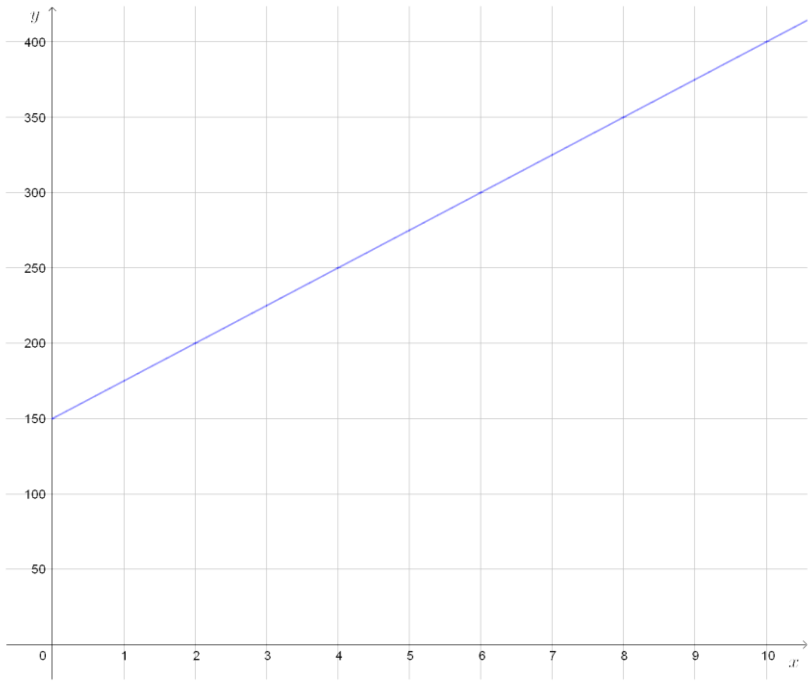
E: 12-13

F: 0-11

Merk at noen oppgaver skåres 1 eller 0, og andre 2, 1 eller 0.

Oppgave 1

Gitt følgende graf:



a) Lag en tabell som viser minst fire x-verdier med tilhørende y-verdi.

1 poeng
Kandidaten har satt opp en tilstrekkelig oversiktlig tabell som viser minst fire x-verdier med tilhørende y-verdi. Det tillattes noe unøyaktighet basert på øyemål. For eksempel kan tabellen se slik ut:

x	2	4	6	8
y	200	250	300	350

Det gis 0 poeng dersom kandidaten presenterer en tabell med tre eller færre par av tilhørende verdier, eller presenterer en tabell som inneholder én eller flere feil.

b) Finn en likning som beskriver grafen over.

1 poeng
Kandidaten presenterer en likning $y = 150 + 25x$ eller en likeverdig likning, slik som for eksempel $x = \frac{y}{25} - 6$.

c) Beskriv med ord en konkret situasjon som kan representeres ved hjelp av grafen. Gi en tolkning av hva x-verdiene og hva y-verdiene representerer.

2 poeng
Kandidaten beskriver med ord en konkret situasjon som kan representeres ved hjelp av grafen, og kandidaten gir en rimelig tolkning av x og y. Grafen kan for eksempel representere prisen for en taxitur. Her representerer x-aksen antall kjørte km, og y-aksen representerer prisen for en kjøretur på x km. Prisen inkluderer startavgiften på 150 kroner. Prisen for en kjøretur på for eksempel 6 km, inkludert startavgiften på 150 kroner, er kr 300.
Et annet eksempel kan være at grafen representerer månedsprisen på et mobilabonnement. Her representerer x-aksen antall GB data som lastes ned (x), og y-aksen representerer prisen per måned når det brukes x GB data. Prisen inkluderer en fast månedsavgift på kr 150. Prisen på for eksempel 6 GB, inkludert månedsavgiften på 150 kroner, er kr 300.

1 poeng
Kandidaten beskriver med ord en konkret situasjon som kan representeres ved hjelp av grafen, men gir en ufullstendig tolkning av hva x- og y-verdiene representerer. Selv om tolkningen er ufullstendig, må situasjonen som beskrives kunne representeres ved hjelp av grafen. Det gis 0 poeng dersom situasjonen som beskrives ikke passer til grafen.

En elev påstår følgende om grafen over: «Da vi lærte om proporsjonale størrelser så fikk vi også en rett linje da vi tegnet grafen. Da er vel også nå x og y proporsjonale…?»

d) Er påstanden riktig? Begrunn svaret ditt.

1 poeng
Kandidaten konstaterer at eleven ikke har rett. Kandidaten gir et begrunnet svar til eleven der han for eksempel fokuserer på ett av disse punktene:
1) x og y er proporsjonale størrelser kun hvis $y = k \cdot x$ for et gitt tall k
2) en dobling av x-verdien fører ikke til en dobling av y-verdien (se verditabell)
3) grafen går ikke gjennom origo

e) Løs likningen $275 = 150 + 25x$ grafisk.

1 poeng
Kandidaten skisserer opp grafene til $y = 25x + 150$ og $y = 275$ i samme koordinatsystem, identifiserer skjæringspunktet mellom grafene og påpeker at løsningen er $x = 5$.
Det gis 0 poeng dersom kandidaten kun skisserer grafene og ikke gir en presis løsning.
Dersom kandidaten kun gir svaret eller bare gir en algebraisk løsning uten å skissere grafene, gis det også 0 poeng.

Oppgave 2

Noen elever blir bedt om å finne tallet slik at likheten i følgende oppgave er sann

$$9 - 3 = \_ + 4.$$

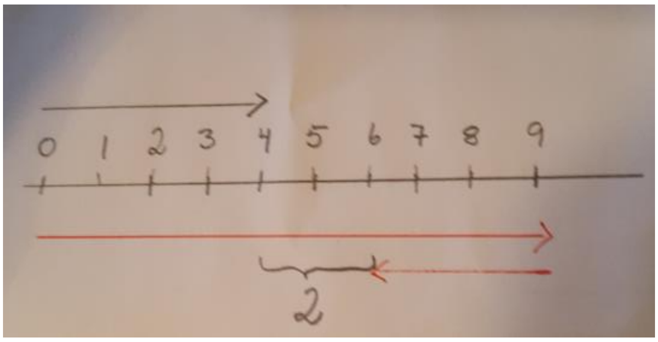
a) Enkelte elever svarer 10, og andre elever svarer 6. Hvordan kan disse elevene kan ha tenkt?

2 poeng
Kandidaten gir passende forklaringer på hvorfor elevgruppene mener at 10 og 6 er riktige svar. Elever som har svart 6, kan ha tenkt slik: De ser på likhetstegnet som «nå kommer svaret», og foran likhetstegnet står 9 – 3. Derfor får de svaret 6. Elever som har svart 10, kan ha tenkt slik: De vet at $9 - 3 = 6$, og de legger deretter til 4 for å utføre regneoperasjonen på høyre side av likhetstegnet også. Derfor får de svaret 10.

1 poeng
Dersom kandidaten bare gir én tilstrekkelig god forklaring, gis det 1 poeng. Det gis 0 poeng dersom kandidaten uttrykker at noe annet enn 2 er riktig svar på oppgaven.

b) Beskriv hvordan vi kan bruke tallinjen til å finne riktig verdi i likheten $9 - 3 = \_ + 4$. Tegn tallinjen og beskriv kort hvordan du tenker.

2 poeng
Kandidaten bruker tallinjen på tilfredsstillende måte for å finne riktig verdi i likheten $9 - 3 = \_ + 4$. Studenten kan for eksempel ha tegnet tallinja slik:



Beskrivelse: Ved subtraksjon på tallinja tegnes pila (her 3) mot venstre fra pila til 9. Deretter tegnes ei pil som er 4 (må kjenne den kommutative lov). Mellom de to pilspissene er det nå en avstand på 2, som er det riktige svaret. Bruk av tom tallinje og riktig forklaring gir også 2 poeng.

1 poeng
Kandidaten viser en meningsfull bruk av tallinjen, men mangler eller gir en mangelfull beskrivelse. Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke beskriver og bruker tallinje.

Kari har hatt en innføringstime om det å løse likninger, og hun gav elevene følgende oppgave:

$$10 - \square = 12 - 7$$

Hun ba elevene om å avgjøre hvilket tall som passer i den tomme boksen for å gjøre likheten sann. Alle elevene fant det riktige svaret 5, men de brukte ulike strategier.

c) Hvilke av følgende strategier er riktige? Begrunn svaret ditt.

1) $12 - 7 = 5$, så jeg må finne ut hva jeg trekker fra 10 for å få 5. $10 - 5 = 5$, så da blir svaret 5.
2) 10 er to mindre enn 12 på den andre siden, så da må jeg trekke fra 2 fra 7 for å få det samme, så svaret er 5.
3) Når jeg regner 12 minus 7 så får jeg 5, så 5 må da settes inn i den tomme boksen for å gjøre uttrykket sant.

2 poeng
Kandidaten begrunner at strategi 1 og 2 er riktige. Eksempel på begrunnelse kan være at strategiene 1 og 2 er riktige fordi eleven forstår at verdiene er like på begge sider av likhetstegnet.

1 poeng
Kandidaten begrunner at strategi 1 eller strategi 2 er riktig uten å oppgi at strategi 3 er feil. Alt annet gir 0 poeng (for eksempel at strategi 1 og strategi 3 er riktige med eller uten begrunnelse).

d) Gitt følgende oppgave:

Finn tre etterfølgende naturlige tall som gir summen 81.

Løs oppgaven på to ulike måter, der den ene måten skal være med bruk av likning.

2 poeng
Kandidaten løser oppgaven korrekt på to ulike måter, der den ene er med bruk av likning. Riktig svar er de tre etterfølgende tallene 26, 27 og 28. Bruk av likning forutsetter at kandidaten setter opp riktig likning og løser denne, og er tydelig på at svaret er tre etterfølgende tall. Den andre måten kan for eksempel være gjett og sjekk.

1 poeng
Kandidaten benytter likning til å finne riktig svar, men med en mangelfull eller manglende måte utover dette. Bruk av likning forutsetter at kandidaten setter opp riktig likning og løser denne, og er tydelig på at svaret er tre etterfølgende tall. Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke bruker likning.

e) Tenk deg at du skal lage en oppgave tilsvarende den gitte oppgaven i d), men med et annet tall enn 81. Finn en egenskap som er nødvendig og tilstrekkelig for at et tall skal være summen av tre etterfølgende naturlige tall. Begrunn svaret ditt algebraisk.

2 poeng
Kandidaten oppgir at tallet må inneholde faktoren 3, eller være delelig med 3, og gir en algebraisk begrunnelse, for eksempel slik:
Jeg kaller det midterste naturlige tallet i de tre etterfølgende tallene for x.
Da betegner n et vilkårlig naturlig tall, større enn x.

$(x-1)+x+(x+1)=n$
$3x=n$

1 poeng

Kandidaten oppgir at tallet må inneholde faktoren 3, eller være delelig med 3, men gir en mangelfull eller manglende algebraisk begrunnelse. Dersom kandidaten kun gir en algebraisk begrunnelse, uten å kommenter egenskapen til tallet, gis det også 1 poeng.

En elev har løst to likninger slik:

Likning 1:	Likning 2:
$x^2+3x=0$	$x^2+5x=6$
$x(x+3)=0$	$x(x+5)=6$
$x=0$ eller $x=-3$	$x=6$ eller $x=1$

f) Har eleven løst likningene riktig? Begrunn svaret ditt.

1 poeng
Kandidaten kommenterer at løsningen av likning 1 er riktig med tanke på bruken av «produktregelen» (eller tilsvarende), og at løsningen av likning 2 ikke er korrekt i så henseende (overgeneralisering av «produktregelen»). Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke oppgir hvilke som er riktige og feil, eller ikke begrunner svaret.

Anne i 9. klasse arbeider med å løse en ulikhet og kommer fram til at $-2x > 10$. Anne vet at når vi deler på et negativt tall, må vi snu ulikhetstegnet, men hun forstår ikke hvorfor.

g) Beskriv hvordan du vil hjelpe Anne til å forstå dette.

1 poeng
Kandidaten beskriver hvordan han vil hjelpe Anne på en god måte, for eksempel å si at uttrykket $-2x$ betyr $-2 \cdot x$, og at Anne skal finne hvilke x-verdier som gjør dette uttrykket større enn 10. Kandidaten kan be Anne forsøke med ulike tallverdier for x, for eksempel -5, som gir $10 > 10$, og $-5{,}5$ som gir $11 > 10$. Anne har da argumenter for å kunne hevde at ulikheten er riktig når $x < -5$.

Kandidaten kan også forsøke å hjelpe Anne ved å «gjøre det samme på begge sider», her å addere $2x$ og subtrahere 10, og med det vise Anne at svaret er det samme som når en bruker regelen.

$$-2x > 10$$
$$-2x + 2x > 10 + 2x$$
$$0x - 10 > 10 - 10 + 2x$$
$$-10 > 2x$$
$$\frac{-10}{2} > \frac{2x}{2}$$
$$-5 > x$$

Det gis 0 poeng dersom kandidaten kun refererer til regelen om at en skal snu ulikhetstegnet når en dividerer med et negativt tall.

Oppgave 3

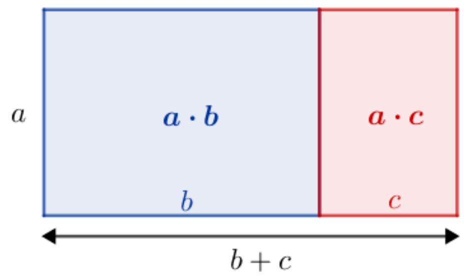
Eleven Ola arbeider med forenkling av algebraiske uttrykk. I forenklingsprosessen skriver han at $5a + 3b$ er lik $8ab$. Læreren ber Ola beskrive hvordan han resonnerer, og Ola sier: «Jeg tenker at a står for appelsiner og b står for bananer, og når vi legger dem sammen får vi åtte frukter».
a) Resonnerer Ola riktig? Begrunn svaret ditt.

2 poeng
Kandidaten kommer frem til at Ola ikke resonnerer riktig og begrunner hvorfor, ved f.eks. å trekke frem at variablene a og b ikke kan stå for forkortelser for ordene appelsiner og bananer eller objektene appelsiner og bananer, men at de kan stå f.eks. for kiloprisen på appelsiner og kiloprisen på bananer. Dersom kandidaten velger å sette inn verdier for a og b som viser at Ola ikke resonnerer riktig, skal det også gis 2 poeng.

1 poeng
Kandidaten angir at Ola ikke resonnerer riktig uten begrunnelse.

b) Ved den distributive loven vet vi at $a \cdot (b + c) = ab + ac$. Lag en illustrasjon med forklaring som viser likheten.

2 poeng
Kandidaten lager en illustrasjon med forklaring, som f.eks.:



Forklaring: Vi kan se på arealet av det store rektangelet, $a \cdot (b + c)$, som summen av arealene av de to små rektanglene, ab og ac, og dermed er $a\cdot (b + c) = ab + ac$.

1 poeng
Kandidaten lager en illustrasjon som over med forklaring, men bruker tall i stedet for bruk av a, b og c. Dersom kandidaten gir en illustrasjon som over med a, b og c, men med manglende eller mangelfull forklaring, gis det også 1 poeng.

En elev fikk som oppgave å forkorte brøken $\frac{4x-16}{x^2-16}$. Her er elevens løsning:

$$\frac{4x-\cancel{16}}{x^2-\cancel{16}} = \frac{4x}{x^2} = \frac{x+x+\cancel{x+x}}{\cancel{x+x}} = x+x = 2x$$

c) Hva er det eleven gjør feil?

1 poeng
Kandidaten påpeker alle tre feilene eller feilene 1) og 2) eller 2) og 3), og bruker korrekt matematisk språk.

1) Eleven tror at han kan forkorte med 16, siden det er et ledd både i telleren og i nevneren (eleven forstår trolig ikke forskjellen mellom faktor og ledd).
2) Eleven tror at $x^2 = x + x$ (at x^2 og $2x$ er det samme).
3) Eleven forkorter med $x + x$ (igjen, eleven forstår trolig ikke at man kun kan forkorte felles faktorer i en brøk).

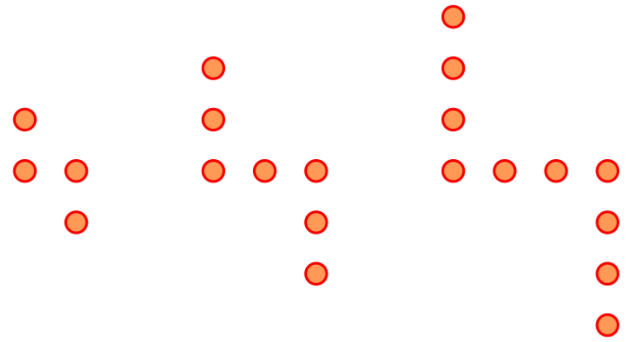
Det gis 0 poeng dersom kandidaten bare påpeker feilene 1) og 3) eller bare én av feilene.

d) Vis hvordan du kan forkorte brøken $\frac{4x-16}{x^2-16}$ på riktig måte.

1 poeng
Kandidaten faktoriserer teller og nevner på riktig måte, forkorter brøken riktig og kommer frem til $\frac{4}{x+4}$.
Det gis 0 poeng dersom kandidaten bare oppgir riktig svar.

Oppgave 4

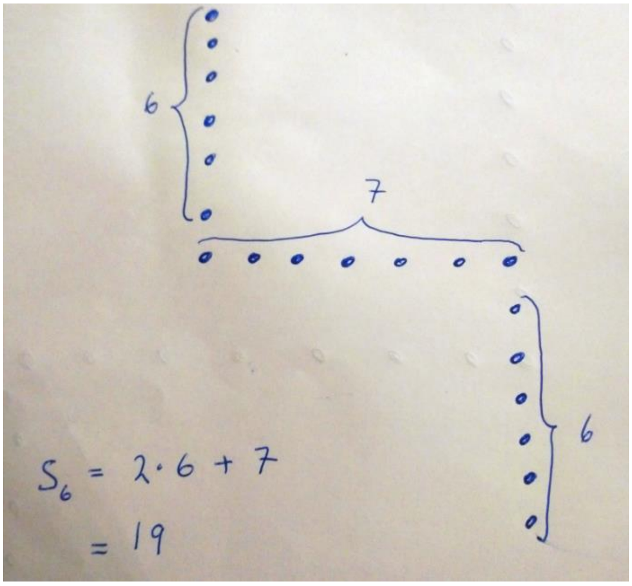
Nedfor er det tegnet tre figurer som representerer stoltallene S_1, S_2 og S_3. Antallet prikker i figur 1 kaller vi for S_1 (stoltall nummer 1), antallet prikker i figur 2 kaller vi S_2 (stoltall nummer 2) og så videre.



S_1 S_2 S_3

a) Bruk figurene til å forklare utviklingen til stoltallene fra S_1 til S_3, og tegn S_6.

1 poeng
Kandidaten bruker figurene til å gi en forklaring som viser at han har sett en sammenheng i hvordan antall prikker øker for de ulike delene av stolen for S_1,S_2 og S_3, og tegner S_6 riktig. Både forklaring og figur må være riktige.
Det er ulike måter å forklare dette på. En måte er å tenke seg at stolfiguren består av en horisontal sitteflate, en rygg og en front. For $n = 1$ består sitteflaten av 2 prikker, ryggen av 1 prikk og fronten av 1 prikk. For hver voksende stol, øker antall prikker med 1 i både sitteflaten, ryggen og fronten. Stoltallene øker altså med 3 for hver stol (når n øker med 1).
En annen forklaring er å si at stol 2 har sitteflate bestående av 3 prikker, og der rygg og front hver består av 2 prikker ($S_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$). Stol 3 har sitteflate bestående av 4 prikker, mens ryggen og fronten begge består av 3 prikker, dvs. $S_3 = 2 \cdot 3 + 4 = 10$. Stol 6 vil da ha en sitteflate bestående av 7 prikker, mens ryggen og fronten begge består av 6 prikker, dvs. $S_6 = 2 \cdot 6 + 7 = 19$.
Eksempel på tegning av S_6:



Det gis 0 poeng dersom kandidaten har en mangelfull forklaring og/eller tegner S_6 feil.

Klassen din arbeider med denne oppgaven. De kommer frem til to ulike formler for stoltall nummer n.

$$S_n = 2n + (n + 1)$$

$$S_n = 2(n + 1) + (n - 1)$$

b) Forklar hvordan begge formlene henger sammen med figurene av stoltallene, og vis algebraisk at formlene er like.

2 poeng
Kandidaten gir riktige forklaringer for hvordan begge formlene henger sammen med figurene av stoltallene, og viser algebraisk at formlene er like. Forklaringene kan være en generalisering av sammenhenger som beskrevet under oppgave a), for eksempel ved å la rygg og front til stol 6 ha like mange prikker, 6, slik at sitteflaten har 7 prikker, dvs. $S_6 = 2 \cdot 6 + (6 + 1)$ slik at stol *n* vil ha $Sn = 2n + (n + 1)$. En annen måte er å øke lengden på rygg og front med 1 prikk, slik at sitteflaten blir prikkene mellom front og rygg. F.eks. for stol 6 så er da $S_6 = 2 \cdot 7 + 5$ og i det generelle tilfellet $Sn = 2(n + 1) + n - 1$. Kandidaten kan vise at formlene er like ved å omforme den ene til den andre: $S_n = 2(n + 1) + (n - 1) = 2n + 2 + n - 1 = 2n + n + 1 = 2n + (n + 1)$.

1 poeng
Kandidaten forklarer riktig hvordan begge formlene henger sammen med figurene av stoltallene uten å vise algebraisk at de er like, eller gir en riktig forklaring på en av formlene og viser algebraisk at formlene er like.

c) Tenk deg at du har 131 prikker til rådighet. Hvilket nummer har det største stoltallet du kan lage?

1 poeng
Kandidaten oppgir at det største stoltallet har nummer 43, dvs. *n* = 43.
Kandidaten kan ta utgangspunkt i at $Sn = 2n + (n + 1) = 3n + 1$, og da må $3n + 1 \leq 131$, dvs. $n \leq 130/3$, og det minste heltallet som tilfredsstiller dette er $n = 43$. ($S_{43} = 130$).
Det er også tilstrekkelig om kandidaten sjekker med innsetting og finner at $S_{43} = 130$ og $S_{44} = 133$ og kommer frem til riktig svar, *n* = 43, på den måten.

d) Finn en eksplisitt formel for tallfølgen hvor de fire første tallene er gitt ved: 2, 7, 15, 26, … (Hint: det kan være nyttig å bruke kvadrattall og trekanttall).

1 poeng
Kandidaten finner riktig formel.
Vi betegner det *n*-te tallet i følgen med H_n. Om en lar trekanttall nr. n betegnes $Tn = \frac{n(n+1)}{2}$ (dvs. $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$) og kvadrattall nr. n med $Kn = n^2$ (dvs. $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$) så ser en at den oppgitte tallfølgen kan skrives:
$H2 = 7 = 3 + 4 = T2 + K2$
$H3 = 15 = 6 + 9 = T3 + K3$
$H4 = 26 = 10 + 16 = T4 + K4$

$\vdots$

$$H_n = T_n + K_n = \frac{n(n+1)}{2} + n^2 = \frac{n(3n+1)}{2}$$

Det er ikke et krav at uttrykket trekkes sammen. Det gis 0 poeng dersom kandidaten ikke kommer frem til en eksplisitt formel.