SENSORVEILEDNING

NASJONAL DELEKSAMEN I
MATEMATIKK FOR GRUNNSKOLELÆRER-UTDANNINGEN 1–7

BOKMÅL

Dato: 23.05.2023

Eksamenstid: 09:00–13:15 (medregnet 15 minutter til å klargjøre besvarelsen)

Hjelpemiddel: Ingen.

Veiledning til hvordan besvare eksamensoppgavene:

- Eksamen gjennomføres som en digital skoleeksamen. Oppgavene besvares i institusjonens eget eksamensverktøy, WISEflow eller Inspera.
- Oppgavene besvares i form av tekst og/eller med tegninger/illustrasjoner. Hvis det står i oppgaveteksten at du skal tegne/illustrere, eller du skal skrive et svar som krever bruk av formler og tegn, kan du velge å gjøre det på papir dersom det er lettere for deg.
    - Avlegger du eksamen i Inspera, vil arkene du skriver på samles inn og skannes av eksamenskontoret.

Avlegger du eksamen i WISEflow, må du ta bilder av tegningene/illustrasjonene ved bruk av webkamera. Bildene legger du inn i besvarelsen selv, under riktig oppgave. Du kan også tegne/illustrere direkte i tekstfilen.

- De siste 15 minuttene har du fått for å klargjøre besvarelsen med blant annet kandidatnummer og sjekk av bilder (WISEflow) eller koder på skanneark (Inspera).
- Husk å oppgi **kandidatnummeret** ditt øverst i besvarelsen.

Antall oppgaver: 6

Antall deloppgaver: 15

Maksimal poengsum: 27

Tabellen viser maksimalt poeng pr. deloppgave.

1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	4a	4b	5a	5b	6a	6b	Tot
2	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	2	2	2	2	27

Karaktergrenser
A: 23
B: 20
C: 15
D: 12
E: 10

Oppgave 1

a) Avgjør og begrunn om påstanden er *alltid sann, alltid usann* eller *av og til sann*:

Tar vi et partall og legger til halvparten av tallet, er svaret alltid delelig med 3. For eksempel så er $2 + 1 = 3$, og 3 er delelig med 3.

2 poeng. Kandidaten svarer at påstanden alltid er sann, og begrunner hvorfor den alltid er sann.

Tre eksempler på fullgode besvarelser:

Eksempel 1:

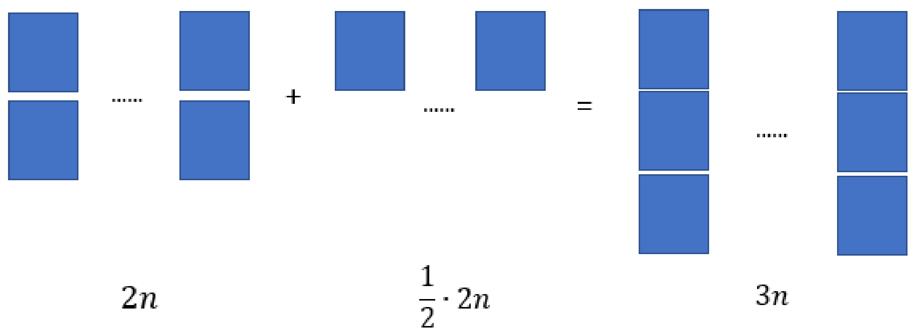
Påstanden er alltid sann. Alle partall er på formen $2n$ for et naturlig tall n. Et partall pluss halvparten av tallet er $2n + \frac{1}{2} \cdot 2n = 2n + n = 3n$, som er delelig med 3.

Eksempel 2:

Påstanden er alltid sann. Et partall består av summen av to like heltall. Ved å legge til halvparten av det samme partallet, får vi tre like heltall der summen er delelig med 3.

Eksempel 3:

Påstanden er alltid sann. Figuren viser hvordan et vilkårlig partall kan deles inn i to like deler. Hvis vi legger til halvparten av det vilkårlige partallet får vi tre like store deler. Summen av disse tre delene er delelig med tre.



1 poeng. Kandidaten svarer at påstanden alltid er sann, men begrunnelsen for hvorfor den alltid er sann har mindre mangler.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

b) Avgjør og begrunn om den etterfølgende påstanden er *alltid sann, alltid usann* eller *av og til sann*:

$$a + b + c = a + d + c$$

2 poeng. Kandidaten svarer at påstanden av og til er sann og begrunner hvorfor den av og til er sann.

Et eksempel på en fullgod besvarelse:

Påstanden er av og til sann. Vi kan trekke fra a og c på begge sider av likhetstegnet, og vi står b må være lik d for at likheten skal være sann. Dermed er påstanden av og til sann, det vil si den er sann bare når $b = d$.

1 poeng. Kandidaten svarer at påstanden av og til er sann, der begrunnelsen for hvorfor den av og til er sann er upresist formulert.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

Oppgave 2

a) Begrunn hvorfor, eller hvorfor ikke, hver av de tre oppgavene nedenfor kan utfordre elever på algebraisk tenkning.

I) $7 + 8 = \_$
II) $15 = 8 + \_$
III) $15 = \_ + \_$

2 poeng. Kandidaten begrunner hvorvidt hver av de tre oppgavene kan utfordre elever på algebraisk tenkning. I begrunnelsen kan kandidaten for eksempel trekke inn elevers forståelse av likhetstegnet, arbeid med ukjente (ord og symboler), mønster, struktur og samvariasjon. Det er ikke tilstrekkelig bare å nevne slike begrep uten konkret å begrunne hvordan de kan knyttes til hver av oppgavene. Særlig bør oppgave I) begrunnes å ha lite potensial for algebraisk tenkning.

To eksempler på fullgode besvarelser:

Eksempel 1:

Oppgave I) utfordrer ikke elever på algebraisk tenkning fordi den er en aritmetisk regn-ut-oppgave. Oppgave II) kan også enkelt løses med regning, men oppgaven krever en relasjonell forståelse av likhetstegnet fordi høyre og venstre side må ha lik verdi. Oppgave III) krever også en relasjonell forståelse av likhetstegnet fordi flere enn ett tallpar kan gjøre likheten sann.

Eksempel 2:

Oppgave I) og II) utfordrer i liten grad elevers algebraiske tenkning fordi oppgavene typisk kan løses med regning eller innlærte tallfakta (hvis elevene vet at 15 er lik $7 + 8$). Oppgave III) kan derimot gi mulighet for å jobbe med samvariasjon og strukturer fordi oppgaven har mange svar, og at det er et system i disse. Eleven kan for eksempel starte med $15 + 0$, $14 + 1$, $13 + 2$ osv. Det er mulig å argumentere for at vi har funnet alle svarene, som er et typisk kjennetegn på algebraisk tenkning.

1 poeng. Kandidaten gir to fullgode begrunnelser og en mangelfull begrunnelse, eller kandidaten gir én fullgod begrunnelse og to begrunnelser med mindre mangler.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng. Det gis også 0 poeng dersom kandidaten ikke kommenterer hver av oppgavene, men bare gir et samlet svar for de tre oppgavene.

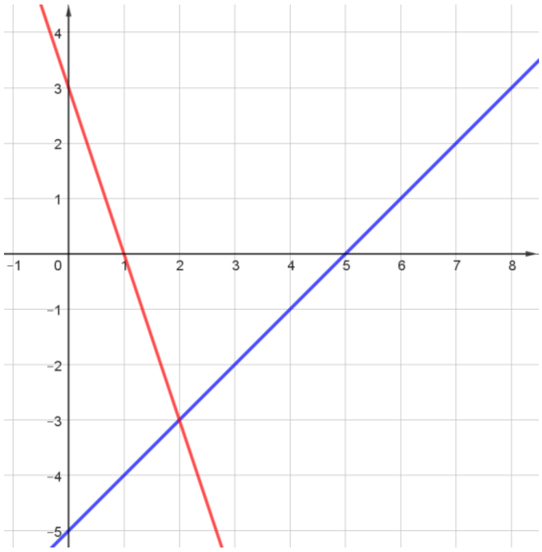
En elev påstår at $x = -1$ er en løsning av likningen $-3x - 3 = 0$.

b) Gi to ulike løsningsforslag for å vise om elevens svar er korrekt eller ikke.

1 poeng. Kandidaten gir to ulike løsningsforslag der det kommer frem at elevens svar er korrekt, for eksempel grafisk løsning, innsetting eller ved å bruke symbolsk algebra. Det regnes som to ulike løsningsforslag dersom kandidaten for eksempel starter med å løse likningen enten ved å dividere begge sider med 3 eller ved å addere begge sider med $-3x$ eller 3.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriet for 1 poeng.

Ulikheten $-3x + 3 < \ -5 + x$ kan representeres grafisk slik:



c) Beskriv sammenhengen mellom grafene og ulikheten. Bruk den grafiske fremstillingen til å begrunne løsningen på ulikheten.

2 poeng. Kandidaten beskriver sammenhengen mellom grafene og ulikheten, og kandidaten bruker den grafiske fremstillingen til å begrunne løsningen på ulikheten.

To eksempler på fullgode besvarelser:

Eksempel 1:

Den høyre siden av ulikheten kan representeres grafisk med den blå grafen, som svarer til funksjonsuttrykket $f(x) = -5 + x$. Den venstre siden av ulikheten kan representeres grafisk med den røde grafen, som svarer til funksjonsuttrykket $g(x) = -3x + 3$. Vi ser når $x > 2$ så er $f \ > g$. Det betyr at løsningen på ulikheten er $x > 2$.

Eksempel 2:

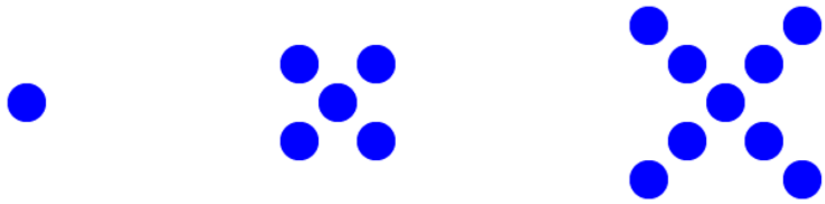
Den røde grafen er venstre side av ulikheten og den blå grafen er høyre side av ulikheten. Løsningen på ulikheten er at $x > 2$, fordi den blå grafen viser større verdier enn den røde grafen for x -verdier til høyre for skjæringspunktet i $x = 2$.

1 poeng. Kandidaten bruker den grafiske fremstillingen til å begrunne løsningen på ulikheten, men beskrivelsen av sammenhengen mellom grafene og ulikheten er mangelfull. Det gis også 1 poeng dersom kandidaten begrunner tilsvarende eksempel 1 og 2, men oppgir løsningen $x \geq 2$.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng. Merk at kandidaten skal bruke den grafiske fremstillingen til å bestemme løsningen til ulikheten. Det betyr at det gis 0 poeng dersom kandidaten for eksempel løser ulikheten ved regning eller bare oppgir at løsningen er $x > 2$.

Oppgave 3

Nedenfor ser du de tre første figurene i et voksende figurmønster. Figurtallet F_n angir totalt antall sirkler i figur nummer n.



Figur 1 Figur 2 Figur 3

$F_1 = 1$ $F_2 = 5$ $F_3 = 9$

Tre elever skrev hver sin formel for antallet sirkler i figur nummer n:

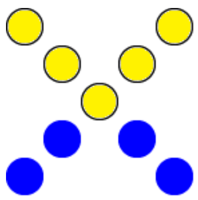
Elev 1:	$2(2n-1)-1$
Elev 2:	$4n-3$
Elev 3:	$4(n-1)+1$

a) Med utgangspunkt i figurene ovenfor, beskriv hvordan *to* av elevene kan ha tenkt for å komme frem til sin formel.

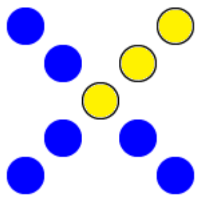
2 poeng. Kandidaten beskriver, med utgangspunkt i figurene, hvordan to av elevene kan ha tenkt for å komme frem til sin formel. Dersom det er tydelig hvilke deler av figurene kandidaten refererer til, trenger ikke kandidaten lage egen illustrasjon.

Eksempler på beskrivelser for hver elev sin formel er gitt under, forklart ut fra Figur 3:

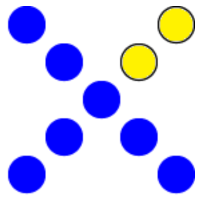
Elev 1 kan ha tenkt at én arm består av n sirkler, slik at den øverste «V'en» i figuren er $2n-1$. Elev 1 har trukket fra 1 for ikke å telle sentersirkelen to ganger. Elev 1 har deretter ganget med to og igjen trukket fra 1, for ikke å telle sentersirkelen to ganger.



Elev 2 kan ha tenkt at hver av fire armer består av n sirkler, derav $4n$. Da er sentersirkelen telt fire ganger slik at tre sentersirkler må trekkes fra.



Elev 3 kan ha tenkt at hver av fire armer består av $n - 1$ sirkler, og at sentersirkelen må legges til, derav $+1$ i formelen.



1 poeng. Kandidaten beskriver, med utgangspunkt i figurene, hvordan én av elevene kan ha tenkt. Kandidaten kan alternativt beskrive hvordan to elever kan ha tenkt, men med mindre mangler for begge.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

b) Med utgangspunkt i det voksende figurmønsteret over, begrunn hvilken figur som er den største du kan lage med 40 sirkler tilgjengelig.

1 poeng. Kandidaten tar utgangspunkt i figurmønsteret og begrunner at den største figuren som kan lages med 40 sirkler, er figur 10 som består av 37 sirkler.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 poeng. Kandidaten svarer feil eller mangler begrunnelse. For eksempel gis det ikke poeng for bare å svare $F_{10} = 37$. Det gis også 0 poeng hvis kandidaten for eksempel bare svarer «$4n - 3$ kan aldri bli 40».

En elev sier: «Hver figur vokser med fire fra den forrige! Det starter med én sirkel i figur 1, så blir det 5, 9 og 13 sirkler og så videre, alltid fire mer.»

c) Lag en rekursiv formel for figurtallene. Beskriv hvordan hvert ledd i formelen henger sammen med elevpåstanden.

1 poeng. Kandidaten lager en rekursiv formel og beskriver hvordan hvert ledd i formelen henger sammen med elevpåstanden. Kandidaten trenger ikke å gjenta at mønsteret starter med $F_1 = 1$ eller å definere at $n \geq 2$.

Et eksempel på en fullgod besvarelse:

En rekursiv formel er $F_n = F_{n-1} + 4$. Eleven snakker om antallet sirkler i hver figur. F_n i formelen betegner antallet sirkler i figur n, F_{n-1} betegner antallet sirkler i forrige figur og slik eleven har identifisert så øker det med fire sirkler for hver figur. Dermed beskriver $+\ 4$ i formelen økningen i antallet sirkler mellom to etterfølgende figurer.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriet for 1 poeng.

Arbeid med voksende figurmønster kan brukes som en inngang til funksjonstenkning. Antallet sirkler i figur n ovenfor kan representeres ved funksjonsuttrykket $f(n) = 4n - 3$.

d) I konteksten med figurmønsteret, hva representerer den avhengige og uavhengige variabelen? Angi definisjonsmengden til f i konteksten med figurmønsteret.

2 poeng. Kandidaten skriver hva variablene representerer i konteksten med figurmønsteret, i tillegg til å angi korrekt definisjonsmengde.

Et eksempel på en fullgod besvarelse:

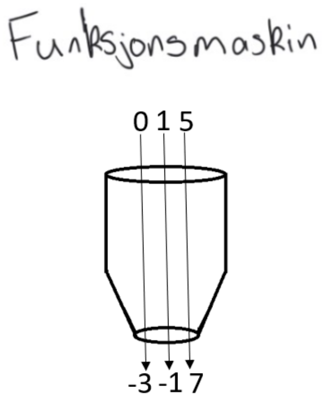
I funksjonsuttrykket er n uavhengig variabel og $f(n)$ er avhengig variabel. I figurmønsteret står de for henholdsvis figurnummer og figurtall. Definisjonsmengden til f er $\{1,2,3,\ldots\}$ fordi de naturlige tallene er de mulige figurnumrene.

1 poeng. Kandidaten identifiserer enten variablene eller oppgir riktig definisjonsmengde i konteksten med figurmønsteret. Alternativt gis det et poeng dersom kandidaten gjør begge deler, men med mindre mangler.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

Oppgave 4

Elever jobber med lineære funksjoner på formen $f(x) = ax + b$. Elever putter inn verdiene $0, 1$ og 5 i funksjonsmaskinen og ut kommer henholdsvis $-3, -1$ og 7.



a) Beskriv både ved bruk av ord og et lineært funksjonsuttrykk hva funksjonsmaskinen gjør med et vilkårlig tall som puttes inn.

2 poeng. Kandidaten beskriver både ved bruk av ord og et lineært funksjonsuttrykk hva funksjonsmaskinen gjør med et vilkårlig tall som puttes inn.

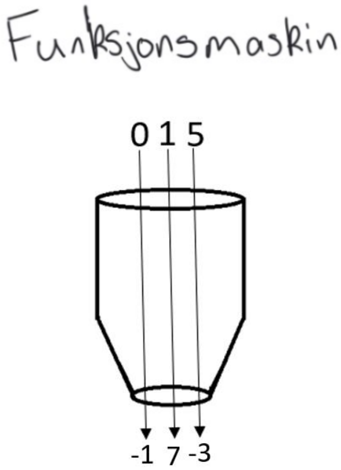
Et eksempel på en fullgod besvarelse:

Funksjonsmaskinen dobler tallet vi putter inn og trekker så i fra 3. Hvis vi kaller det vilkårlige tallet vi putter inn i funksjonsmaskinen for x, blir funksjonsuttrykket $f(x) = 2x - 3$.

1 poeng. Kandidaten beskriver hva funksjonsmaskinen gjør med et vilkårlig tall som puttes inn, enten ved bruk av ord eller et lineært funksjonsuttrykk.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

I arbeidet med lineære funksjoner spør en elev om det også finnes en funksjonsmaskin som gir verdiene $-1, 7$ og -3 når vi henholdsvis putter inn verdiene $0, 1$ og 5.

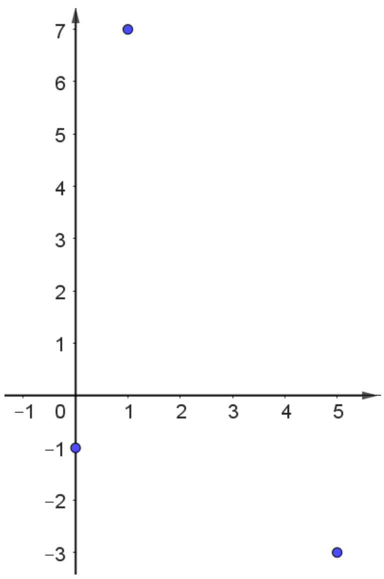


b) Gi to ulike begrunnelser for hvorfor en slik lineær funksjonsmaskin ikke finnes.

2 poeng. Kandidaten gir to ulike begrunnelser for hvorfor en slik lineær funksjonsmaskin ikke finnes.

Et eksempel på en fullgod besvarelse:

Begrunnelse 1: Hvis en slik lineær funksjonsmaskin skal finnes, må punktene $(0, -1), (1,7)$ og $(5, -3)$ ligge på en rett linje. Det ser vi at de ikke gjør når vi tegner dem inn i et koordinatsystem.



Begrunnelse 2: Når x-verdien går fra 0 til 1, så øker y-verdien, men når x-verdien går fra 1 til 5, så avtar y-verdien. En lineær funksjon kan ikke både ha positiv og negativ stigning, og dermed kan ikke en slik lineær funksjonsmaskin finnes.

1 poeng. Kandidaten gir én begrunnelse for hvorfor en slik lineær funksjonsmaskin ikke finnes.

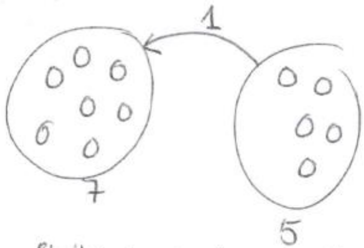
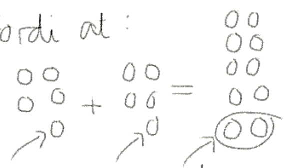
0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

Oppgave 5

Elever på mellomtrinnet skal svare på følgende spørsmål:

Stemmer det *aldri*, *alltid* eller *av og til* at summen av to oddetall er et partall?

Nedenfor ser du tre elevsvar:

Elev 1	Elev 2	Elev 3
$\overset{o}{5}+\overset{o}{5}=\overset{p}{10}$ $\overset{o}{5}+\overset{o}{3}=\overset{p}{8}$ $\overset{o}{7}+\overset{o}{7}=\overset{p}{14}$ stemmer alltid!	 flytte 1 gir to partall og da blir summen partall.	Det stemmer alltid. Fordi at:  Det er en ekstra prikk på oddetall, og de to sammen blir partall.

a) Velg to elevsvar som du mener at *ikke* er et gyldig bevis for at summen av to oddetall *alltid* er et partall. Gi én grunn for hvorfor hvert av de to elevsvarene ikke er et gyldig bevis.

2 poeng. Kandidaten velger to elevsvar og gir én grunn for at hver av dem ikke er et gyldig bevis. Alle de tre elevsvarene er mulige å kritisere.

Eksempler som kan nevnes:

Elev 1: Svaret er bare basert på eksempler (empirisk argument) og begrunner ikke *hvorfor* summene blir partall. Argumentet peker ikke på matematiske egenskaper ved oddetall, og svaret sier derfor ingenting om at det *alltid* vil være slik.

Elev 2: Argumentet bygger på at å «flytte én» fra et oddetall til et annet gir to partall, og det pekes på at summen av to partall er partall. At summen av to partall er partall må altså være kjent for klassen dersom argumentet skal være gyldig. Odde-/partallstrukturene kommer ikke tydelig frem, så argumentet er også basert på at tallrekka består av annethvert odde- og partall. Det kan også diskuteres om eksempelet får frem det generelle i tilstrekkelig grad.

Elev 3: Her er det brukt en representasjon som tydelig får frem oddetallsstrukturen («par + en ekstra»), og hvordan to oddetall former et partall. En innvending kan være at det ikke er eksplisitt begrunnet at dette alltid gjelder. At addendene i eksempelet er like er ikke formelt feil, men det er et uheldig valg av eksempel. Kandidater som bruker dette for å beskrive at Elev 3 sitt argument ikke er gyldig, skal ikke trekkes i poeng.

1 poeng. Kandidaten grunngir kun ett elevsvar på en fullgod måte.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

b) Velg ett av de tre elevsvarene som du mener bygger på en korrekt idé. Fullfør elevens svar slik at det blir et gyldig bevis for at summen av to oddetall alltid er et partall.

2 poeng. Kandidaten velger et elevsvar og fullfører argumentet til et gyldig bevis for påstanden. Svaret må inneholde en tydelig formulering om at dette vil gjelde for *alle* summer av to oddetall.

1 poeng. Kandidaten velger et elevsvar, men fullfører ikke argumentet. Beviset må inneholde *mer* enn det som allerede står i elevsvaret. Det gis også 1 poeng dersom kandidaten gir et gyldig bevis for påstanden, men som ikke er tydelig basert på et av elevsvarene.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.

Oppgave 6

En lærer undersøker elevers forståelse av prioriteringsreglene for matematiske operasjoner. På oppgavene I) $3 + 12 : 2 - 1$ og II) $10 - (5 - 3 \cdot 4)$ svarer en elev slik:

I) $3 + 12 : 2 - 1 = 15$
II) $10 - (5 - 3 \cdot 4) = 2$

a) Beskriv for hver av oppgavene I) og II) hvordan eleven kan ha kommet frem til svaret. Hvis du mener at eleven svarte feil, viser du korrekt stegvis utregning.

2 poeng. Kandidaten beskriver hvordan eleven kan ha kommet frem til svaret og oppgir selv korrekt stegvis utregning på begge oppgavene.

Et eksempel på en fullgod besvarelse:

I) Eleven kan først ha summert 3 og 12, deretter trukket 1 fra 2 og til slutt dividert 15 med 1.
Korrekt utregning: $3 + 12 : 2 - 1 = 3 + 6 - 1 = 8$
II) Eleven kan først ha trukket 3 fra 5, deretter multiplisert resultatet med 4, og til slutt trukket 8 fra 10.
Korrekt utregning: $10 - (5 - 3 \cdot 4) = 10 - (5 - 12) = 10 - (-7) = 10 + 7 = 17$

1 poeng. Kandidaten avgjør at begge svarene er feil og oppgir selv korrekt løsning på begge oppgavene, men kandidaten har kun én fullgod beskrivelse for hvordan eleven kan ha regnet.

0 poeng. Kandidatens svar oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng. Det gis 0 poeng dersom kandidaten avgjør at begge svarene er feil, men ikke oppgir korrekte løsninger selv.

En elev jobber med uttrykk på formen $(a + b)^2$ og spør om utregningene nedenfor er korrekte:

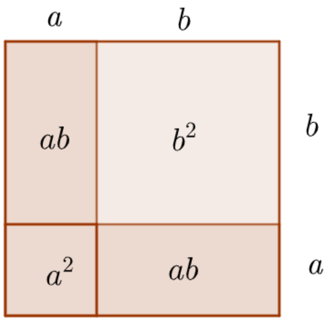
$$(1 + 5)^2 = 1^2 + 5^2 = 26$$
$$(3 + 7)^2 = 3^2 + 7^2 = 58$$

b) Illustrer korrekt utregning av uttrykk på formen $(a + b)^2$, og bruk illustrasjonen til å forklare at elevens utregninger er gale.

2 poeng. Kandidaten illustrerer korrekt utregning av uttrykk på formen $(a+b)^2$, og bruker illustrasjonen til å forklare at elevens utregninger er gale.

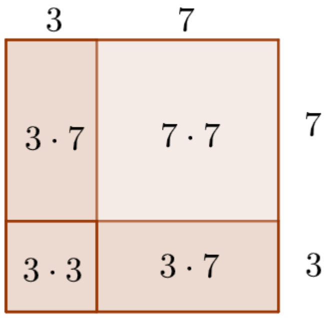
To eksempler på fullgode besvarelser:

Eksempel 1:



Illustrasjonen viser hvordan vi kan representere uttrykk på formen $(a+b)^2$ som et kvadrat delt inn i mindre arealer. I begge utregningene mangler eleven leddene som tilsvarer rektanglene (ab), og derfor blir utregningene gale.

Eksempel 2:



Illustrasjonen viser hvordan vi kan representere uttrykket $(3+7)^2$ som et kvadrat delt inn i mindre arealer. Slike uttrykk kan alltid representeres ved et kvadrat inndelt på denne måten. I begge utregningene mangler eleven leddene som tilsvarer rektanglene $(3 \cdot 7)$, og derfor blir utregningene gale.

1 poeng. Kandidaten illustrerer korrekt utregning av uttrykk på formen $(a+b)^2$, og bruker illustrasjonen til å forklare at elevens utregninger er gale, men besvarelsen har mindre mangler.

0 poeng. Kandidatens besvarelse oppfyller ikke kriteriene for 1 eller 2 poeng.